Leçon 150 : Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'endomorphismes en dimension finie. Applications

Références : Gourdon, Rombaldi, Grifone, Berhuy, Mansuy

I - Polynômes d'endomorphismes

1) Algèbre $K[u]$ et polynôme minimal

2) Éléments propres

3) Polynôme caractéristique

II - Réduction d'endomorphismes

1) Diagonalisation

2) Trigonalisation

3) Décomposition de Dunford

4) Quelques endomorphismes remarquables diagonalisables

a) Endomorphismes orthogonaux

b) Endomorphismes semi-simples

III - Applications

1) Inverse d'un endomorphisme

2) Calcul de puissances de matrices

3) Calcul d'exponentielles de matrices

DEV 1 : Décomposition de Dunford

DEV 2 : Endomorphismes semi-simples

Leçon 150 : Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'endomorphisme en dimension finie. Applications.

Soit K un corps commutatif et E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

I - Polynômes d'endomorphismes

1) Algèbre $K[u]$ et polynôme minimal [ROT] [BER]

DEF 1 : On note $u^0 = Id$ et on définit les puissances successives de u par la relation de récurrence $u^{k+1} = u \circ u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

DEF 2 : On définit pour tout $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in K[X]$ l'endomorphisme $P(u) = \sum_{k=0} a_k u^k$.

PROP 3 : $\forall P, Q \in K[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (QP)(u)$

Ceci montre que l'application $\varphi : K[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $P \longmapsto P(u)$ est un morphisme de K-algèbres dont l'image $K[u] = \{P(u),\ P \in K[X]\}$ est une sous-algèbre commutative.

EX 4 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $S \in K[X]$. Alors $\ker(S(u))$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u.

PROP 5 : Comme $\dim(E) < \infty$, le morphisme φ n'est pas injectif donc $\ker(\varphi)$ est un idéal de $K[X]$ donc principal.

DEF 6 : L'idéal $\ker(\varphi)$ est appelé idéal annulateur de u. On le note $Ann(u)$ et $Ann(u) = \{P \in K[X] / P(u) = 0\}$.
Le générateur unitaire de cet idéal est appelé polynôme minimal de u et noté π_u.

REM 7 : On a donc : $P \in Ann(u) \iff \pi_u | P$.

EX 8 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'indice $q \geq 1$ si et seulement si $\pi_u(X) = X^q$.
- Le polynôme minimal d'un projecteur p est $\pi_p = X$ si $p = 0$, $\pi_p = X - 1$ si $p = Id$ et $\pi_p = X(X-1)$ sinon.

LEMME 9 : Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $\pi_{u_{|F}}$ divise π_u.

THM 10 : L'espace vectoriel $K[u]$ est de dimension finie égale à $p_u = \deg(\pi_u)$. Une base est donnée par $(u^k)_{0 \leq k \leq p_u - 1}$

THM 11 : On a les équivalences :
$K[u]$ est un corps $\iff$ $K[u]$ est intègre $\iff$ π_u est irréductible

THM 12 (Lemme des noyaux). Soient $(P_j)_{j \in [\![1,p]\!]}$ une famille de $p \geq 2$ polynômes deux à deux premiers entre eux dans $K[X] \setminus \{0\}$ et $P = \prod_{k=1}^{p} P_k$. Alors $\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(P_i(u))$

REM 13 : Tous les résultats énoncés sur les polynômes d'endomorphismes sont valables pour les matrices.

PROP 14 : Si $E = F \oplus G$ avec F, G stables par u, alors on a $\pi_u = PPCM(\pi_{u_{|F}}, \pi_{u_{|G}})$.

PROP 15 : Soient $P, Q \in K[X]$, $D = PGCD(P,Q)$. Alors : $\ker(P(u)) \cap \ker(Q(u)) = \ker(D(u))$.

COR 16 : Soit $P \in K[X]$ un diviseur de π_u. Alors si $v = u_{|\ker(P(u))}$ on a $\pi_v = P$.

[MAN]

2) Éléments propres [GRI] [GOU]

DEF 17 : On dit que $\lambda \in K$ est valeur propre de u lorsqu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. On appelle spectre de u sur K et on note $Sp_K(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u dans K.
On dit que x est vecteur propre de u associé à λ.

EX 18 : Un projecteur non nul et différent de Id_E admet 0 et 1 comme valeur propre.

DEF 18 : Soit $\lambda \in Sp_K(u)$. On appelle sous-espace propre de E associé à λ l'espace vectoriel $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E)$. C'est un sev de E stable par u.

THM 19 : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u. Alors $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

PROP 20 : Si u et $v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

3) Polynôme caractéristique [GOU]

DEF 21 : On appelle polynôme caractéristique de u et on note χ_u le polynôme de $K[X]$ défini par $\chi_u(X) = \det(X Id_E - u)$

PROP 22 : $\lambda \in Sp_K(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0$. On note m_λ la multiplicité de λ comme racine de χ_u

REM 23 : Si K est algébriquement clos, $Sp_K(u) \neq \emptyset$.

EX 24 : Soit $P \in K[X]$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Sa matrice compagnon $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & \end{pmatrix}$ vérifie $\chi_{C_P} = \pi_{C_P} = P$.

PROP 24 : On a $\forall \lambda \in Sp(u)$, $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$.

PROP 25 : On a $\chi_u = X^n - tr(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$.

PROP 26 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par u. Soit $v = u_{|F}$. Alors $\chi_v | \chi_u$.

EX 27 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors $\chi_u = X^n$.

A mettre dans I.2)

THM 28 : Soit $P \in K[X]$. Pour tout $\lambda \in Sp_K(u)$, $P(\lambda) \in Sp_K(P(u))$. Si K est algébriquement clos, on a $Sp(P(u)) = \{P(\lambda) / \lambda \in Sp(u)\}$

THM 29 (Cayley-Hamilton) : On a $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Autrement dit $\pi_u | \chi_u$.

II - Réduction d'endomorphismes

1) Diagonalisation [GRI] [GOU]

DEF 30 : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u soit diagonale.

DEF 31 : De même, on dit que $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable lorsque A est semblable à une matrice diagonale.

EX 32 : Les homothéties de rapport k sont diagonalisables

THM 33 : Les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) u est diagonalisable,
(2) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u
(3) $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ où $Sp_K(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.
(4) $\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i})$
(5) $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $\dim(E_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}$ et χ_u est scindé.
(6) Il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule u
(7) π_u est scindé à racines simples.

COR 34 : Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

COR 35 : Si u est diagonalisable et F un sev stable par u. Alors $u_{|F}$ est diagonalisable.

EX 36 : En reprenant EX 24, C_P est diagonalisable ssi P est scindé à racines simples (dans K).

2) Trigonalisation [GRI] [GOU]

DEF 37 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u soit triangulaire supérieure. De même pour les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$.

THM 38 : u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé dans K.

COR 39 : Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire (de même si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ avec K alg. clos).

COR 40 : Si u est trigonalisable et si F est un sev stable par u. Alors $v = u_{|F}$ est trigonalisable.

REM 41 : Si $A = PTP^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ avec $P \in GL_n(K)$ et T triangulaire supérieure, on a $T = D + N$ avec D diagonale et N nilpotente. Cependant, en général, on n'a pas $DN = ND$!

3) Décomposition de Dunford [GOU] DEV 1

PROP 42 : Soit $P = \beta M_1^{\alpha_1} \dots M_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $K[X]$ de $P \in Ann(u)$. Pour tout i, on note $N_i = \ker(M_i^{\alpha_i}(u))$. On a alors $E = \bigoplus N_i$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u.

THM 43 : (Décomposition de Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur K. Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes qui sont des polynômes en u tels que
(i) d est diagonalisable, n est nilpotent
(ii) $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.

4) Quelques endomorphismes remarquables diagonalisables

a) Endomorphismes orthogonaux [ROM]

On suppose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E muni d'une structure euclidienne (ou hermitienne).

DEF 44 : Un endomorphisme u est dit orthogonal lorsque $\forall x, y \in E^2$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.

DEF 45 : Une matrice M est dite unitaire lorsque $M^* M = M M^* = I_n$ (si $K = \mathbb{R}$, $M^* = {}^tM$, si $K = \mathbb{C}$, $M^* = {}^t\overline{M}$)

PROP 46: u est orthogonal ssi sa matrice dans une base orthonormée de E est unitaire.

PROP 47: $\forall \lambda \in Sp(u)$, $|\lambda| = 1$ $(K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

THM 48: Soit u un endomorphisme orthogonal. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit : • $K=\mathbb{R} \rightarrow$ [ANNEXE 1]
$K = \mathbb{C} \rightarrow$ [ANNEXE 2]

b) Endomorphismes semi-simples [GOU]

DEF 49: On dit $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple lorsque pour tout sev F stable par u, il existe un supplémentaire S de F stable par u.

DEV 2

PROP 50: Si Π_u est irréductible, alors u est semi-simple.

THM 51: u est semi-simple si et seulement si $\Pi_u = M_1 \cdots M_r$ est produit de polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux.

COR 52: Si K est algébriquement clos, u est semi-simple si et seulement si u est diagonalisable.

THM 53: Soit u semi-simple et $K=\mathbb{R}$. Alors il existe une base de E dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} D & \\ & B \end{pmatrix}$ avec D diagonale et B constituée de blocs de la forme $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ centrés sur sa diagonale principale.

III - Applications

1) Inverse d'un endomorphisme [MAN]

PROP 54: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur $P \in K[X]$ tel que $P(0) \neq 0$. Alors u est inversible. De plus, $u^{-1} \in K[u]$.

EX 55: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(u - 2Id_E) \circ (u - 3Id_E) = 0$
$u^2 - 5u + 6Id_E = 0$, alors $u^{-1} = -\frac{1}{6}(u - 5Id_E)$.

PROP 56: $u \in \mathcal{L}(E)$ est inversible si et seulement si son polynôme minimal Π_u n'admet pas 0 comme racine.

2) Calcul de puissances de matrices [GRI]

PROP 57: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in Ann(u)$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u^m \in Vect(Id_E, u, \dots, u^{N-1})$.

PROP 58: Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalisable. Alors : $\exists P \in GL_n(K)$ et $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $M = PDP^{-1}$.
Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$ et $D^k = diag(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$

EX 59: Calculer une puissance de matrices peut être utile pour déterminer explicitement des suites récurrentes linéaires :

$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$ On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,
$X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

3) Calcul d'exponentielles de matrices [GRI]

DEF 60: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La série $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge absolument donc converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle exponentielle de A et on note $\exp(A)$ la somme de cette série.

PROP 61: Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

PROP 62: Soit $A = D + N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la décomposition de Dunford de A. Alors :
$$\exp(A) = \exp(D) + \exp(N) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - Id_E)$$
Si $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\exp(D) = diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$

EX 63: Calculer des exponentielles de matrices est utile pour résoudre des systèmes d'équations différentiels linéaires du type :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n \end{cases} \iff \frac{dX}{dt} = AX, \quad A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Les solutions sont $t \mapsto \exp(tA)X_0$, $X_0 \in \mathbb{C}^n$.

ANNEXE 1 : $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & \varepsilon_p & & & \\ & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $\varepsilon_i \in \{-1;1\}$.

et $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ $\forall i \in [\![1;r]\!]$. $\theta_i \in \mathbb{R}$.

ANNEXE 2 : $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \varepsilon_p & & & & & \\ & & & e^{i\theta_1} & & & & \\ & & & & e^{-i\theta_1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & e^{i\theta_r} & \\ (0) & & & & & & & e^{-i\theta_r} \end{pmatrix}$

où $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $\varepsilon_i \in \{-1;1\}$, $\forall i \in [\![1;r]\!]$, $\theta_i \in \mathbb{R}$.

Sources : Gourdon, Rombaldi, Berhuy, Mansuy, Gourdon.